پروژه‌های جئوجبرایی!

رسم اعداد رادیکالی روی محور

سیدمهدی بشارت

ارقام بی‌شمار

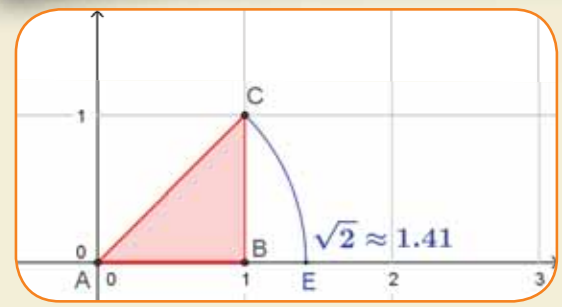
اعداد گنگ همیشه مفرح و سرگرم‌کننده‌اند، زیرا ارقام اعشارشان تمامی ندارد و در این بی‌شمار رقم، همه‌چیز پیدا می‌شود! یکی از تفریح‌های ذهنی من این است که یک عدد گنگ انتخاب کنم و با نرم‌افزارهایی مثل «Maple» یا «Mathematica»، ارقام آن عدد را تا هزاران رقم محاسبه کنم و در آن شمارهٔ شناس‌نامه یا شمارهٔ تلفن خودم را بیابم، یا شمارهٔ تلفن دوستم را پیدا کنم و برایش هدیه بفرستم!

برنامه‌ها و نرم‌افزارهای زیادی هستند که شما نیز می‌توانید با آن‌ها این بازی را انجام دهید. مثلاً شما می‌توانید در صفحهٔ اینترنتی زیر، عدد π را تا یک میلیون رقم اعشار مشاهده کنید.
(http://www.piday.org/million/)

بنابراین ما مجبوریم در نوشتن اعداد گنگ همیشه از تقریب استفاده کنیم. مثلاً وقتی می‌گوییم عدد π برابر است با ۳/۱۴ آن را تا دو رقم اعشار بیان کرده‌ایم و میلیون‌ها و بلکه بی‌شمار رقم اعشار دیگر این عدد را نادیده گرفته‌ایم. یعنی عدد π **تقریباً** با ۳/۱۴ برابر است و ما هیچ‌گاه امکان بیان دقیق عدد π را نداریم. همین مطلب سبب شده است بعضی از بچه‌ها فکر کنند، حالا که نمی‌شود یک عدد گنگ را دقیقاً بیان کرد. روی محور اعداد هم نمی‌توان دقیقاً جای آن را معلوم کرد! اتفاقاً همین که نام این اعداد «گنگ» است هم به این گمانه کمک می‌کند. خود من از جمله کسانی بودم که فکر می‌کنند، اعداد گنگ اعداد مبهمی هستند و معلوم نیست چه هستند و روی محور کجایند!

ترسیم رازآلود

اما اکنون همهٔ ما به‌خوبی می‌دانیم، با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس به‌راحتی می‌توانیم عدد گنگی مثل $\sqrt{2}$ را روی محور اعداد نشان دهیم.



شکل ۱

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$AC = \sqrt{2}$$

مثلثی که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، قائم‌الزاویه است و هر ضلع زاویهٔ قائمه آن ۱ واحد است. پس وتر آن از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید. سپس با پرگار وتر AC را روی محور اعداد می‌خوابانیم. یعنی سوزن پرگار را روی A می‌گذاریم و دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ وتر AC باز می‌کنیم و کمان می‌زنیم تا محور را در نقطهٔ E قطع کند. بدین‌ترتیب نقطهٔ E دقیقاً $\sqrt{2}$ را نشان می‌دهد.

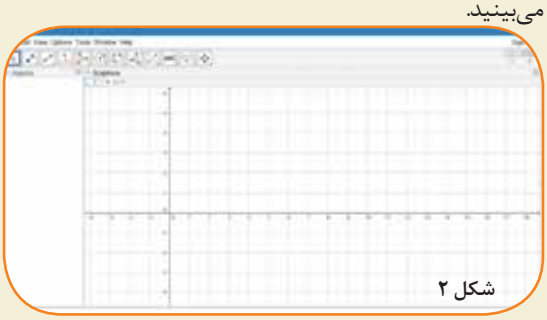
با شما موافقم، باورش خیلی سخت است. عددی که بی‌شمار رقم اعشار دارد و برای نوشتن آن هزاران صفحه نیز کافی نیست، جایگاهش یک نقطهٔ مشخص روی محور باشد؛ نقطه‌ای به اندازهٔ سر سوزن یا خیلی خیلی کوچک‌تر!

هرچه در ترسیم دقیق‌تر باشیم، نقطهٔ E با دقت بیشتری $\sqrt{2}$ را نشان می‌دهد. یعنی اگر محورها دقیقاً بر هم عمود باشند، واحدها کاملاً مساوی باشند و ابزارمان دقیق باشد، آن‌گاه ما همان‌قدر اطمینان داریم که نقطهٔ E عدد $\sqrt{2}$ را نشان می‌دهد که مطمئن هستیم نقطهٔ A عدد ۱ را نمایش می‌دهد.

به مدد رایانه

رسم دقیق $\sqrt{2}$ با «خط‌کش و پرگار» بسیار ارزشمند است، ولی امروزه نرم‌افزارهای رایانه‌ای به ما کمک می‌کنند تا بتوانیم به‌سادگی ولی با دقت زیاد این رسم را انجام دهیم.

یکی از این نرم‌افزارها «جئوجبرا» است. نرم‌افزاری رایگان که از سایت خودش به‌نام «geogebra.org» به‌راحتی دانلود می‌شود. صفحهٔ ورودی این برنامه مانند صفحه‌ای است که در شکل ۲ می‌بینید.



شکل ۲

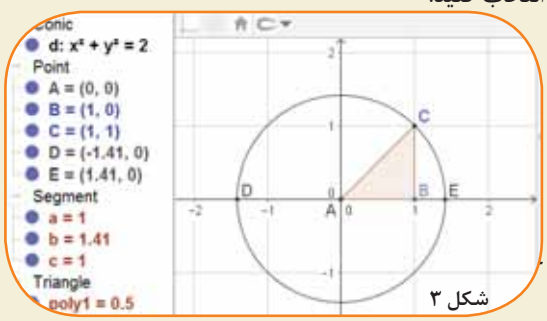
مراحل رسم $\sqrt{2}$

۱. با استفاده از آیکون مثلث ABC را رسم کنید. وتر این مثلث $\sqrt{2}$ است.

۲. با استفاده از آیکون دایره‌ای به مرکز A و شعاع AC رسم کنید.

۳. نقطهٔ برخورد دایره با محور xها، $\sqrt{2}$ را روی محور نشان می‌دهد. (چرا؟)

برای انتخاب این نقطه نخست روی مثلث کوچک گوشهٔ آیکون کلیک کنید، تا یک منو باز شود. سپس آیکون را انتخاب کنید.



شکل ۳

حالا یک‌بار روی دایره و یک‌بار هم روی محور xها کلیک کنید. چون دایره محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند، دو نقطهٔ D و E ایجاد می‌شود. یکی از این دو نقطه $\sqrt{2}$ و دیگری $-\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد.

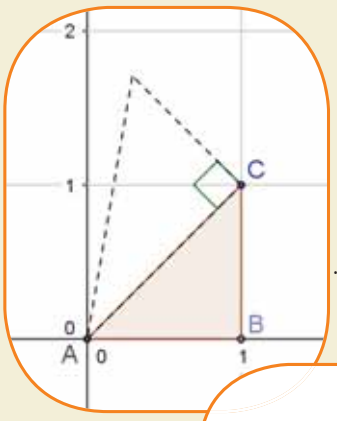
مشاهده می‌کنید که در این نرم‌افزار، هر شیئی که رسم می‌کنید، مقدار جبری آن در پنجرهٔ سمت چپ نمایان می‌شود؛ مانند مختصات نقاط و اندازهٔ پاره‌خط‌ها.

اگر با چرخاندن قرقرهٔ موس بزرگ‌نمایی این تصویر را زیاد کنید، جایگاه نقطهٔ E را که با تقریب دو رقم اعشار ۱/۴۱ است، بهتر مشاهده می‌کنید.

شکل ۴

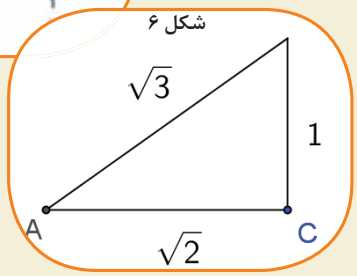
رسم $\sqrt{3}$

اگر یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\sqrt{2}$ و ضلع دیگر ۱ باشد، طبق فیثاغورس وتر آن $\sqrt{3}$ خواهد شد.



شکل ۵

بنابراین کافی است در همان شکل قبل روی وتر $\sqrt{2}$ یک مثلث قائم‌الزاویه جدید بنا کنید؛ مانند شکل ۵.

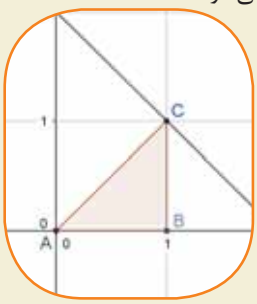


شکل ۶

حالا مراحل این کار را در جئوجبرا دنبال می‌کنیم:

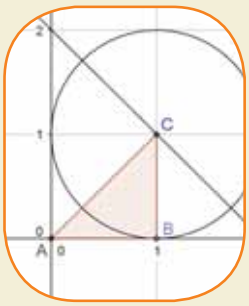
برای اینکه شکلمان خلوت شود، دایره را پاک کنید. یعنی دایره را انتخاب کنید و دکمهٔ «Delete» را فشار دهید. مشاهده می‌کنید که نقاط D و E نیز حذف می‌شوند، چون وابسته به آن دایره بودند.

۱. در این نرم‌افزار آیکون نقش گونیا را ایفا می‌کند. روی آن کلیک کنید. آن‌گاه ابتدا روی نقطهٔ C و سپس روی پاره‌خط AC کلیک کنید. مطابق شکل ۷ خطی از نقطهٔ C بر پاره‌خط AC عمود رسم می‌شود.



شکل ۷

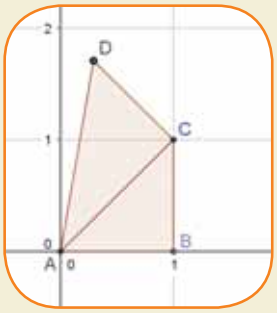
۲. حالا باید روی این خط ۱ واحد جدا کنیم. به این منظور باید دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۱ رسم کنیم.



شکل ۸

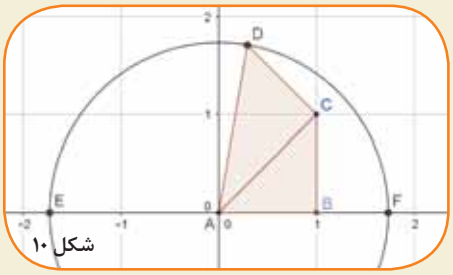
از منوی دایره‌ها دومین آیکون، یعنی را انتخاب کنید. روی نقطهٔ C کلیک کنید. پنجره‌ای باز می‌شود و شعاع دایره را می‌پرسد. عدد ۱ را وارد کنید.

۳. نقطهٔ تقاطع خط و دایره را با آیکون مشخص کنید. سپس مثلث ACD را با استفاده از آیکون رسم کنید. وتر AD برابر با $\sqrt{۳}$ خواهد بود. برای خلوت شدن شکل می‌توانید خط و دایره را مخفی کنید. به این منظور روی هرکدام «راست‌کلیک» کنید و «Show Object» را کلیک کنید. **مواظب باشید که آن‌ها را حذف نکنید، چون تمام اشیای وابسته به آن‌ها نیز حذف می‌شوند.**



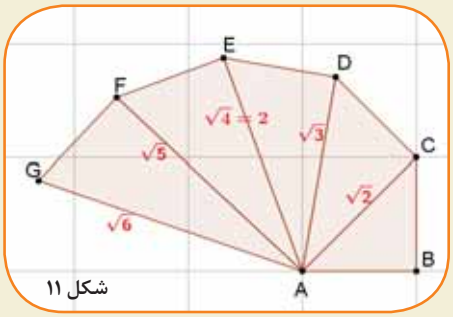
شکل ۹

۴. در آخرین مرحله باید وتر $\sqrt{۳}$ را روی محور بخوابانید. باید از آیکون استفاده کنید. ابتدا روی A و سپس روی D کلیک کنید. آن‌گاه نقاط تقاطع این دایره با محور xها را با استفاده از آیکون پیدا کنید.



شکل ۱۰

نقاط E و F به‌ترتیب $-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}$ را نشان می‌دهند. (چرا؟)



شکل ۱۱

نمودار حلزونی

برای رسم رادیکال‌های بعدی، همچون $\sqrt{۴}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$ و...، همان مراحل رسم $\sqrt{۳}$ را می‌توان دنبال کرد. به این ترتیب جذر هر عدد طبیعی را می‌توان رسم کرد.

اگر این فرایند را ادامه دهیم، نموداری به‌دست می‌آید که به آن «نمودار حلزونی» گفته می‌شود.

در نمودار حلزونی زیبای شکل ۱۲، اعداد رادیکالی تا $\sqrt{۴۰}$ قابل مشاهده هستند.

شکل ۱۲

یادداشت: حجم انبوهی از فایل‌های ساخته‌شده با نرم‌افزار جئوجبرا در صفحهٔ «geogebra.org/materials/» در دسترس عموم قرار دارد. از آن جمله می‌توانید فایل نمودار حلزونی را مشاهده کنید:

http://www.geogebra.org/m/h9RG6QXt